Acta Agrophysica, *2010, 16(1), 207-215*

JAK ZŁAGODZIĆ ZŁE UWARUNKOWANIE PROBLEMU IDENTYFIKACJI MODELU MAXWELLA ROŚLINNYCH MATERIAŁÓW LEPKOSPRĘŻYSTYCH

Anna Stankiewicz

Katedra Podstaw Techniki, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie
ul. Doświadczalna 50A, 20-282 Lublin
e-mail: anna.stankiewicz@up.lublin.pl

S t r e s z c z e n i e. W pracy rozważa się klasyczny zadanie modelowania matematycznego materiałów lepkosprężytych – zadanie wyznaczania modelu Maxwella na podstawie dyskretnych zakłóconych pomiarów modułu relaksacji zgromadzonych w teście relaksacji naprężeń. Zadanie to jest źle uwarunkowanym problemem odwrotnym. Celem pracy jest przedstawienie remedium, jakim jest zastosowanie techniki regularyzacji problemu oryginalnego. Skuteczność tej techniki zilustrowano na prostym przykładzie numerycznym oraz dla zadania identyfikacji modelu Maxwella próbki buraka cukrowego odmiany Janus badanego w stanie jednoosiowego odkształcenia w warunkach obciążeń udarowych.

S ł o w a k l u c z o w e: lepkosprężystość, model Maxwella, problem źle postawiony, regularyzacja

WSTĘP

Ważnym źródłem informacji o własnościach fizycznych surowców i produktów rolno-spożywczych są modele reologiczne stosowane do opisu tych materiałów już od kilkudziesięciu lat (Chen 1994, Gołacki 1998, 2000, Rao 1999). Znajomość własności lepkosprężystych materiałów rolno-spożywczych ma fundamentalne znaczenie dla modelowania ich zachowań mechanicznych podczas deformacji i płynięcia.

Zazwyczaj przyjmujemy, że model jest dobry, satysfakcjonujący, jeśli dostatecznie dobrze przybliża dane doświadczalne lub pozwala przewidywać zjawiska zachodzące w badanym materiale lub procesie. Klasyczne problemy modelowania matematycznego materiałów lepkosprężytych: zadania wyznaczania modeli Maxwella i Kelvina są problemami źle postawionymi w sensie Hadamarda. Problemy te nierzadko nie posiadają jednoznacznego rozwiązania, a każde z ich rozwiązań ma tę własność, że niewielka zmiana danych zadania (np. danych doświadczalnych) może powodować istotną zmianę wyznaczonego modelu. Ilustrują to przykłady podane w pracy (Stankiewicz 2010).

Celem tej pracy jest przedstawienie remedium, jakim jest dla zadania identyfikacji parametrów modelu Maxwella regularyzacja oryginalnego nieliniowego problemu najmniejszej sumy kwadratów. Oprócz niezbędnego przykładu numerycznego, rozważania zilustrowano przykładem identyfikacji modelu Maxwella próbki buraka cukrowego Janus badanego w stanie jednoosiowego odkształcenia w warunkach obciążeń udarowych.

ROZWIĄZANIE ZADANIA IDENTYFIKACJI MODELU MAXWELLA

Moduł relaksacji modelu Maxwella, powszechnie stosowanego do opisu zjawiska relaksacji naprężeń zachodzącego w materiale liniowo lepkosprężystym, przyjmuje postać skończonego szeregu Dirichleta-Prony'ego (Zi i Bažant 2002)

$$G_M(t,\boldsymbol{g}) = \sum_{j=1}^{n} E_j e^{-t\nu_j} + E_\infty, \tag{1}$$

którego wektor parametrów

$$\boldsymbol{g} = [E_1 \quad \ldots \quad E_n \quad \nu_1 \quad \ldots \quad \nu_n \quad E_\infty]^T,$$

tworzą moduły sprężystości E_j oraz częstotliwości relaksacji ν_j poszczególnych gałęzi modelu, a także parametr E_∞ oznaczający wartość ustaloną modułu relaksacji (ang. *long-term modulus*), n oznacza liczbę gałęzi modelu. Indeks „*M*" w (1) oznacza model i pozwala odróżnić model modułu relaksacji (1) od rzeczywistego modułu relaksacji $G(t)$ badanego materiału. Wektor parametrów modelu $\boldsymbol{g} \in \mathcal{G}$, gdzie $\mathcal{G}$ jest zbiorem dopuszczalnych parametrów modelu $G_M(t,\boldsymbol{g})$ (1). Ponieważ parametry E_j, ν_j i E_∞ są nieujemne $\mathcal{G} \subset R_+^{2n+1}$, gdzie $R_+ = [0,\infty)$.

Moduł relaksacji $G(t)$ można wyznaczyć eksperymentalnie rejestrując siłę reakcji próbki badanego materiału w standardowym teście relaksacji naprężeń (Gołacki 1998, Rao 1999). Będziemy zakładać, że przeprowadzono skończony eksperyment dyskretny (test relaksacji naprężeń), którego rezultatem jest zbiór pomiarów modułów relaksacji $\overline{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$ w chwilach czasu $t_i \geq 0$,

$i=1,\ldots,N$, gdzie $z(t_i)$ jest addytywnym błędem pomiarowym, $0 \le t_i \le T$, natomiast $T < \infty$ oznacza horyzont czasowy eksperymentu.

Problem optymalnej identyfikacji modułu relaksacji w klasie modeli Maxwella (1) polega na takim doborze wektora parametrów $\boldsymbol{g} \in \mathcal{G}$ modelu $G_M(t,\boldsymbol{g})$, aby model ten przybliżał dane eksperymentalne $\{\overline{G}(t_i)\}$ jak najlepiej w sensie przyjętego wskaźnika jakości modelu. Jako miarę dokładności modelu (1) przyjmiemy klasyczny wskaźnik średniokwadratowy

$$Q(\boldsymbol{g}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\overline{G}(t_i) - G_M(t_i,\boldsymbol{g})\right]^2 . \tag{2}$$

Problem optymalnej identyfikacji modelu $G_M(t,\boldsymbol{g})$ (1) sprowadza się więc do rozwiązania zadania optymalizacji postaci

$$Q(\overline{\boldsymbol{g}}) = \min_{\boldsymbol{g}\in\mathcal{G}} Q(\boldsymbol{g}) . \tag{3}$$

Zadanie to jest od kilkudziesięciu lat dobrze znane w literaturze z zakresu identyfikacji systemów (Evans i in. 1980, Kammler 1979), gdyż problem aproksymacji danych sumą funkcji wykładniczych jest jednym z najistotniejszych i najczęściej w analizie danych występujących zadań identyfikacji. Modele wykładnicze są bowiem stosowane, przykładowo, w modelowaniu szeregów czasowych w naukach fizycznych i technologii, przepływów ciepła, dyfuzji komponentów chemicznych, przepływów międzykomorowych w medycynie i biologii, taką postać przyjmują również modele kompartmentowe (Gutenbaum 2003). Wiadomo także, że nieliniowy problem aproksymacji danych sumą funkcji wykładniczych jest zadaniem skomplikowanym i stosunkowo trudnym numerycznie (Kammler 1979, Varah 1985, Holmström i Petersson 2002). Złe uwarunkowanie zadania wyznaczania modelu Maxwella ilustruje, przedstawiony w pracy (Stankiewicz 2010), numeryczny przykład identyfikacji modelu trójparametrowego, w którym niewielkie zakłócenia powodują znaczenie większe błędy oszacowania parametrów modelu. Ten prosty przykład o jednoznacznym rozwiązaniu wskazuje także, że nawet doskonałe dopasowanie modelu do danych doświadczalnych może nie gwarantować dobrego oszacowania jego parametrów, jeśli problem jest źle uwarunkowany. Nieliniowa metoda najmniejszej sumy kwadratów oparta na standardowych numerycznych technikach minimalizacji, takich jak algorytmy kierunków poprawy lub metody kierunków sprzężonych, nie jest więc skutecznym narzędziem wyznaczenia parametrów modelu Maxwella, szczególnie wówczas, gdy nie dysponujemy dobrym punktem startowym. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat opracowano kilka specjalnych metod aproksymacji danych pomiarowych sumą funkcji wykładniczych (Kammler 1979, Evans i in. 1980, Ruhe 1980) skutecznych jednak tylko przy bardzo restrykcyjnych założeniach dotyczących danych pomiarowych. Osborne i Smyth (1995), Pisarenko (Ouibrahim 1989) oraz Petersson i Holmström (1998) zastosowali do rozwiązania tego zadania ideę starej osiemnastowiecznej metody Prony'ego. Także w pracy (Stankiewicz 2005) zastosowano pewną modyfikację metody Prony'ego, która w przypadku czteroparametrowych modeli Maxwella prowadzi do bardzo prostego w implementacji schematu identyfikacji. W tej pracy wskażemy na możliwość skutecznego zastosowania do identyfikacji modelu Maxwella zregularyzowanej nieliniowej metody najmniejszych kwadratów.

Zastosowanie regularyzacji Tichonowa (Tikhonov i Arsenin 1977) do rozwiązania zadania (3) oznacza rozwiązanie zmodyfikowanego problemu optymalizacji postaci

$$\min_{\boldsymbol{g}\in\mathcal{G}} \; Q(\boldsymbol{g})+\lambda\|\boldsymbol{g}\|_2^2 = Q\left(\overline{\boldsymbol{g}}^{\lambda}\right)+\lambda\left\|\overline{\boldsymbol{g}}^{\lambda}\right\|_2^2, \tag{4}$$

gdzie $\|\cdot\|_2$ oznacza normę kwadratową w przestrzeni euklidesowej R^{2n+1}, a $\lambda>0$ jest parametrem regularyzacji.

Jak wiadomo skuteczność stosowania techniki regularyzacji Tichonowa zależy od metody doboru parametru regularyzacji. Dobór współczynnika regularyzacji jest sztuką wymagającą zarówno intuicji, dobrych heurystyk, jak i często wiedzy apriorycznej o zakłóceniach. Tu zastosujemy prostą regułę doboru współczynnika regularyzacji, w której uwzględnia się wprost wartość wskaźnika jakości modelu, gwarantując założoną dokładność aproksymacji modułu relaksacji (ang. *Guaranteed Model Approximation– GMA*). Reguła *GMA* została po raz pierwszy zastosowana w pracy autorki (Stankiewicz 2003) dla zadania identyfikacji spektrum czasów relaksacji. Dla dowolnego $\lambda>0$ zachodzi nierówność $Q\left(\overline{\boldsymbol{g}}^{\lambda}\right)>Q(\overline{\boldsymbol{g}})$, gdzie $\overline{\boldsymbol{g}}$ jest rozwiązaniem (z reguły niejednoznacznym) zadania oryginalnego (3). Stabilizacja rozwiązania zadania (3) odbywa się więc kosztem pogorszenia jakości wyznaczonego modelu. Naturalną strategią doboru parametru regularyzacji λ, jest taki jego dobór, aby gwarantował on założoną dokładność $\hat{Q}>Q(\overline{\boldsymbol{g}})$ aproksymacji modułu relaksacji, czyli aby $Q\left(\overline{\boldsymbol{g}}^{\overline{\lambda}}\right)=\hat{Q}$.

Interpretację reguły *GMA* oraz ważną własność uzyskanego rozwiązania podaje następujące twierdzenie. Jego dowód pomijamy, ponieważ jest analogiczny do dowodu twierdzenia 2 w pracy autorki (Stankiewicz 2003).

Twierdzenie 1. *Niech* $\hat{Q} > Q(\bar{\boldsymbol{g}})$. *Rozwiązanie zregularyzowane* $\bar{\boldsymbol{g}}^{\bar{\lambda}}$ *zdefiniowane przez* $Q\left(\bar{\boldsymbol{g}}^{\bar{\lambda}}\right) = \hat{Q}$ i (4) *jest jedynym rozwiązaniem zadania optymalizacji*

$$\min_{\boldsymbol{g} \in \mathcal{G}} \|\boldsymbol{g}\|_2^2 \quad \textit{przy ograniczeniu} \quad Q(\boldsymbol{g}) \le \hat{Q}.$$

Z twierdzenia wynika, że dobór parametru regularyzacji zgodnie z regułą *GMA*, gwarantując założoną dokładność dopasowania modelu do danych eksperymentalnych, oznacza wybór wśród wszystkich rozwiązań spełniających warunek $Q_N(\boldsymbol{g}) \le \hat{Q}_N$ rozwiązania o minimalnej normie, czyli najlepsze wygładzenie wektora $\bar{\bar{\boldsymbol{g}}} = \bar{\boldsymbol{g}}^{\bar{\lambda}}$.

Skuteczność tej techniki zilustrujemy na przykładzie zadań identyfikacji modelu Maxwella rozpatrywanych w pracy (Stankiewicz 2010).

Przykład 1. Rozważmy ponownie materiał lepkosprężysty, którego moduł relaksacji $G(t)$ opisany jest funkcją

$$G(t) = Ee^{-t\nu} + E_\infty, \tag{5}$$

a wartości jego parametrów podano w tabeli 1, dla którego przyjęto model Maxwella postaci:

$$G_M(t) = E_M\, e^{-t\nu_M} + E_{M,\infty} \tag{6}$$

i przeprowadzono test relaksacji naprężeń opisany szczegółowo w pracy (Stankiewicz 2010, przykład 1). Ponieważ dla modelu o minimalizującym wskaźnik Q parametrze $\bar{\boldsymbol{g}}$ (Stankiewicz 2010, tabela 1) $Q(\bar{\boldsymbol{g}}) = 0{,}0336\, MPa^2$, przyjmiemy $\hat{Q} = 0{,}036\, MPa^2$, co oznacza niewielkie pogorszenie dokładności przybliżenia modułu relaksacji. Wyznaczono współczynnik $\bar{\lambda} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ oraz parametry modelu optymalnego $\bar{\bar{\boldsymbol{g}}} = \bar{\boldsymbol{g}}^{\bar{\lambda}}$ – podano je w tabeli 1.

Tabela 1. Parametry materiału (5) i jego optymalnego modelu Maxwella (6)
Table 1. Parameters of the material (5) and the optimal Maxwell model (6)

Parametry materiału The material parameters	Parametry modelu optymalnego The optimal model parameters	Błędy estymacji parametrów The parameters estimation errors
$E = 10\, MPa$	$\overline{\overline{E}}_M = 9{,}863\, MPa$	$\left(E - \overline{\overline{E}}_M\right)/E \cdot 100\% = 1{,}37\%$
$E_\infty = 8\, MPa$	$\overline{\overline{E}}_{M,\infty} = 8{,}06\, MPa$	$\left(\overline{\overline{E}}_{M,\infty} - E_\infty\right)/E_\infty \cdot 100\% = 0{,}75\%$
$\nu = 0{,}025\, s^{-1}$	$\overline{\overline{\nu}}_M = 0{,}0251\, s^{-1}$	$\left(\overline{\overline{\nu}}_M - \nu\right)/\nu \cdot 100\% = 0{,}4\%$
$\tau = 40\, s$	$\overline{\overline{\tau}}_M = 39{,}841\, s$	$\left(\tau - \overline{\overline{\tau}}_M\right)/\tau \cdot 100\% = 0{,}398\%$
$\eta = E/\nu = 400 MPa \cdot s$	$\overline{\overline{\eta}}_M = 392{,}95\, MPa \cdot s$	$\left(\eta - \overline{\overline{\eta}}_M\right)/\eta \cdot 100\% = 1{,}76\%$

W tabeli 1 podano także odpowiednie wartości czasów relaksacji i współczynników lepkości dynamicznej oraz względne błędy estymacji parametrów materiału (5). Wskaźnik $\|\boldsymbol{z}\|_2 / \|\overline{\boldsymbol{G}}\|_2 \cdot 100\% = 2{,}59\%$, gdzie $\overline{\boldsymbol{G}} = \left[\overline{G}(t_1) \;\; \ldots \;\; \overline{G}(t_N)\right]^T$ to wektor pomiarów modułu relaksacji, $\boldsymbol{z} = [z(t_1) \;\; \ldots \;\; z(t_N)]^T$ oznacza wektor wartości zakłóceń. Największy z błędów oszacowania parametrów materiału (5) nie przekracza $1{,}8\%$ – świadczy to o skuteczności zastosowanej techniki regularyzacji. Względny wskaźnik jakości

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\overline{G}(t_i) - \overline{\overline{E}}_M e^{-\overline{\overline{\nu}}_M t} - \overline{\overline{E}}_{M,\infty}\right]^2 \Big/ \overline{G}(t_i)^2 = 2{,}38 \cdot 10^{-4}$$

jest w tym przypadku mniejszy niż dla modelu wyznaczonego w pracy (Stankiewicz 2010) bez regularyzacji.

Przykład 2. W tym przykładzie wyznaczymy czteroparametrowy model Maxwella

$$G_M(t) = E_{M,1} e^{-t \nu_{M,1}} + E_{M,2} e^{-t \nu_{M,2}} \tag{7}$$

opisujący zjawisko relaksacji w próbce buraka cukrowego Janus badanej przez Gołackiego i jego współpracowników (Gołacki i in. 2003). Przebieg testu relaksacji naprężeń oraz sposób wstępnego przetworzenia wyników eksperymentu opisano szczegółowo w przykładzie 2 w pracy (Stankiewicz 2010). Dla pierwszego i drugiego zestawu danych (p. (Stankiewicz 2010)) zastosowano opisany powyżej schemat regularyzacji zadania identyfikacji, parametr regularyzacji dobrano metodą *GMA*. Ponieważ dla pierwszego zbioru danych pomiarowych średniokwadratowy wskaźnik jakości modelu optymalnego $Q(\bar{\boldsymbol{g}}) = 4{,}28 \cdot 10^{-3}\ MPa^2$, przyjmiemy $\hat{Q} = 4{,}4 \cdot 10^{-3}\ MPa^2$, co oznacza pogorszenie dokładności przybliżenia modułu relaksacji rzędu $2{,}7\%$. Dla drugiego zestawu danych $Q(\bar{\boldsymbol{g}}) = 3{,}823 \cdot 10^{-3}\ MPa^2$, tu przyjmiemy $\hat{Q} = 3{,}85 \cdot 10^{-3}\ MPa^2$. Wyznaczono współczynniki regularyzacji $\bar{\lambda} = 1 \cdot 10^{-6}$ i $\bar{\lambda} = 0{,}9 \cdot 10^{-6}$, odpowiednio dla pierwszego i drugiego zestawu danych, oraz optymalne parametry modelu zregularyzowanego – podano je w tabeli 2. W tabeli 2 zestawiono także odpowiednie wartości czasów relaksacji i współczynników lepkości dynamicznej oraz względne błędy estymacji parametrów modelu. Największy z nich nie przekracza $0{,}5\%$, co ponownie potwierdza skuteczność techniki regularyzacji Tichonowa.

Tabela 2. Parametry optymalnego modelu Maxwella (7)
Table 2. The parameters of the optimal Maxwell model (7)

Parametry modelu dla pierwszego zbioru danych The model parameters for the first set of data	Parametry modelu dla drugiego zbioru danych The model parameters for the second set of data	Błędy oszacowania parametrów The parameter estimation errors
$E_{M,1} = 10{,}56069\ MPa$	$\bar{E}_{M,1} = 10{,}57079\ MPa$	$(\bar{E}_{M,1} - E_{M,1})/\bar{E}_{M,1} \cdot 100\% = 0{,}096\%$
$E_{M,2} = 16{,}99126\ MPa$	$\bar{E}_{M,2} = 16{,}98912\ MPa$	$(E_{M,2} - \bar{E}_{M,2})/E_{M,2} \cdot 100\% = 0{,}013\%$
$\nu_{M,1} = 0{,}853\,E-3\ s^{-1}$	$\bar{\nu}_{M,1} = 0{,}857\ E-3\ s^{-1}$	$(\bar{\nu}_{M,1} - \nu_{M,1})/\bar{\nu}_{M,1} \cdot 100\% = 0{,}467\%$
$\nu_{M,2} = 9{,}98456\ s^{-1}$	$\bar{\nu}_{M,2} = 9{,}99342\ s^{-1}$	$(\bar{\nu}_{M,2} - \nu_{M,2})/\bar{\nu}_{M,2} \cdot 100\% = 0{,}089\%$
$\tau_{M,1} = 1172{,}3329\ s$	$\bar{\tau}_{M,1} = 1166{,}8611\,s$	$(\bar{\tau}_{M,1} - \tau_{M,1})/\bar{\tau}_{M,1} \cdot 100\% = 0{,}467\%$
$\tau_{M,2} = 0{,}100155\ s$	$\bar{\tau}_{M,2} = 0{,}100066\ s$	$(\tau_{M,2} - \bar{\tau}_{M,2})/\tau_{M,2} \cdot 100\% = 0{,}089\%$
$\eta_{M,1} = 12380{,}65\ MPa \cdot s$	$\bar{\eta}_{M,1} = 12334{,}649\,MPa \cdot s$	$(\bar{\eta}_{M,1} - \eta_{M,1})/\bar{\eta}_{M,1} \cdot 100\% = 0{,}372\%$
$\eta_{M,2} = 1{,}701754\,MPa \cdot s$	$\bar{\eta}_{M,2} = 1{,}700031\,MPa \cdot s$	$(\bar{\eta}_{M,2} - \eta_{M,2})/\bar{\eta}_{M,1} \cdot 100\% = 0{,}101\%$

UWAGA KOŃCOWA

Modele Maxwella i Kelvina odgrywają fundamentalną rolę w opisie zjawisk relaksacji naprężeń i pełzania w materiałach lepkosprężystych. Błędy w oszacowaniu parametrów tych modeli mogą powodować katastrofalne błędy wyznaczenia innych bazujących na tych modelach charakterystyk materiałów. W zadaniu identyfikacji modelu Maxwella jako antidotum na złe uwarunkowanie zadania skutecznie zastosowano regularyzację problemu oryginalnego. Współczynnik regularyzacji dobrano stosując naturalną w kontekście zadania identyfikacji modelu matematycznego metodą GMA, gwarantującą zadaną dokładność aproksymacji pomiarów modułu relaksacji.

PIŚMIENNICTWO

Chen P., 1994. Creep response of generalised Maxwell model. Int. Agrophysics 8, 555-558.

Evans J. W., Gragg W. B., LeVeque R. J., 1980. On Least-Squares Exponential Sum Approximation with Positive Coefficients. Mathematics of Computations 34(149), 203–211.

Gołacki K., 1998. Charakterystyki lepkosprężyste korzeni marchwi w szerokim zakresie prędkości obciążeń mechanicznych. Rozprawy naukowe Akademii Rolniczej w Lublinie, 216.

Gołacki K., 2000. Some applications of viscoelastic characteristic of plant materials with high level of water content. Agricultural Engineering, 32(3), 25-33.

Gołacki K., Kołodziej P., Stankiewicz A., Stropek Z., 2003. Sprawozdanie merytoryczne z realizacji projektu KBN nr 5P06F00619 pt. Charakterystyka odporności mechanicznej buraków cukrowych w aspekcie spotykanych w praktyce obciążeń mechanicznych, s. 214.

Gutenbaum J., 2003. Modelowanie matematyczne systemów. EXIT, Warszawa.

Holmström K., Petersson J., 2002. A review of parameter estimation problem of fitting positive exponential sums to empirical data. Applied Mathematics and Computation, 126, 31-61.

Kammler D. W., 1979. Least squares approximation of completely monotonic functions by sums of Exponentials. SIAM J. Numer. Anal, 16(5), 801-818.

Osborne M.R., Smyth G.K., 1995. A modified Prony algorithm for exponential function fitting, SIAM J. Sci. Comput. 16, 119–138.

Ouibrahim H., 1989. Prony, Pisarenko, and the matrix pencil: a unified presentation. IEEE Transact. Acoust., Speech and Signal Proc. 37(1), 133–134.

Petersson J., Holmström K., 1998. Initial values for two-classes of exponential sum least squares fitting problems. Research Report IMa-TOM-1998-07. Mälardalen University, Sweden.

Rao M.A., 1999. Rheology of Fluid and Semisolid Foods. Principles and Applications. Aspen Publishers, Inc., Gaithersburg, Maryland.

Ruhe A., 1980. Fitting empirical data by positive sums of exponentials. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1(4), 481-498.

Stankiewicz A., 2003. Algorytm identyfikacji ciągłego spektrum czasów relaksacji biologicznych materiałów lepkosprężystych. Acta Scientiarum Polonorum, Seria Technica Agraria, 2(2), 77-91.

Stankiewicz A., 2005. Identyfikacja matematycznych modeli lepkosprężystych materiałów biologicznych metodą Prony'ego. Acta Scientiarum Polonorum, Seria Technica Agraria, 4(1), 41-59.

Stankiewicz A., 2010. O źle i dobrze postawionych problemach identyfikacji modeli roślinnych materiałów lepkosprężystych. Acta Agrophysica (skierowano do druku).

Tikhonov A. N., Arsenin V. Y., 1977. Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley, New York.

Varah J. M., 1985. On fitting exponentials by nonlinear least squares. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 6 (1), 30-44.

Zi G., Bažant Z. P., 2002. Continuous Relaxation Spectrum for Concrete Creep and its Incorporation into Microplane Model M4. J. Eng. Mechanics, ASCE 128(12), 1331-1336.

HOW TO MOLLIFY THE ILL POSEDNESS OF THE PROBLEM OF MAXWELL MODEL IDENTIFICATION OF VISCOELASTIC PLANT MATERIALS

Anna Stankiewicz

Department of Technical Science, University of Life Sciences
ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin
e-mail: anna.stankiewicz@up.lublin.pl

Abstract. The paper deals with the problem of Maxwell model determination from discrete-time noise corrupted measurements of relaxation modulus obtained in stress relaxation test. This problem is known to be *ill-posed.* In this paper the Maxwell model is determined using nonlinear least squares method and Tikhonov regularization technique. The validity of the approach is demonstrated using simulated data. The effectiveness of the method is also demonstrated through the computation of the four-parameter Maxwell model of a sugar beet root sample in the state of uniaxial strain.

Keywords: viscoelasticity, Maxwell model, ill-posed problem, regularization